Μάθημα 4ο

8-3-2016

Έργο Δύναμης:

Ορισμός:
Το έργο που εκτελείται από μία δύναμη $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ επί λόγω καμπύλης $\vec{r}(t)$ στο χρονικό διάστημα $a \le t \le b$ είναι: $W = \int_a^b \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \int_a^b \vec{F}\, d\vec{r}$

Αν θεωρήσουμε τη δύναμη ως διανυσματικό πεδίο, για παράδειγμα ένα βαρυτικό πεδίο που δρα σε μία περιοχή του χώρου και ένα Υ.Σ. κινείται στην καμπύλη $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ το έργο που παράγεται ή καταναλώνεται για να μετακινηθεί το Υ.Σ. από ένα σημείο A στο σημείο B είναι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$W = \int_A^B \vec{F}\, \underbrace{d\vec{r}}_{\hat{T}\, ds}$$

Τρόποι υπολογισμού του έργου:

$$W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot \hat{T}\, ds = \int_A^B \vec{F} \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt = \int_A^B \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}\, dt$$

$$= \int_A^B \vec{F} \cdot (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\, dt = \int_A^B (M, N, P)(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})\, dt$$

$$= \int_A^B (M\dot{x} + N\dot{y} + P\dot{z})\, dt = \int_A^B M\dot{x}\, dt + N\dot{y}\, dt + P\dot{z}\, dt$$

$$= \int_A^B M\, dx + N\, dy + P\, dz$$

Παράδειγμα ②

Ν.β. το έργο της $\vec{F}=(y-x^2,\ z-y^2,\ x-z^2)$ επί της καμπύλης $\vec{r}=(t,\ t^2,\ t^3)$ από το $A=(0,0,0)$ στο $B=(1,1,1)$

Λύση

Από την καμπύλη: $\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}=1 \\ \dot{y}=2t \\ \dot{z}=3t^2 \end{cases}$ οπότε:

$$W=\int_0^1 \left[(y-x^2)1+(z-y^2)2t+(x-z^2)3t^2\right]dt=$$

$$\int_0^1 \left[(t^2-t^2)+(t^3-t^4)2t+(t-t^6)3t^2\right]dt=\dots=\frac{29}{60}$$

Το ερώτημα που θέλουμε να απαντήσουμε σχετικά με την ενέργεια ενός σωματίου είναι αν δαπανάται ή αν παράγεται ενέργεια από την επίδραση μιας δύναμης ενός διανυσματικού πεδίου. Το έργο εξ ορισμού εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθούμε. Στην ειδική όμως περίπτωση που το έργο είναι ανεξάρτητο της διαδρομής και εξαρτάται μόνο από το αρχικό σημείο A και το τελικό σημείο B, το πεδίο $\vec{F}$ καλείται συντηρητικό (διατηρητικό).

Ορισμός:

Ένα πεδίο δυνάμεων $\vec{F}$ ορισμένο σε ένα ανοιχτό χωρίο D και A, B δύο σημεία του D. Αν το έργο $W=\int_A^B \vec{F}\,d\vec{r}$ είναι το ίδιο για κάθε τυχαία καμπύλη που ενώνει τα A, B, τότε λέμε ότι είναι ανεξάρτητο της διαδρομής που επιλέγουμε να ακολουθήσουμε και το πεδίο $\vec{F}$ καλείται συντηρητικό, διατηρητικό στο D. Επιπλέον αν υπάρχει συνάρτηση L τέτοια ώστε $\vec{F}=\vec{\nabla}L$, τότε

$$W=\int_A^B \vec{F}d\vec{r}= L(B)-L(A)$$

Η παραγωγίσιμη συνάρτηση L καλείται συνάρτηση δυναμικού της $\vec{F}$ στο χωρίο D.

$$\vec{F}d\vec{r}=\vec{\nabla}L\cdot d\vec{r}=\left(\frac{\partial L}{\partial x},\frac{\partial L}{\partial y},\frac{\partial L}{\partial z}\right)(dx,dy,dz)=$$

$$=\frac{\partial L}{\partial x}dx+\frac{\partial L}{\partial y}dy+\frac{\partial L}{\partial z}dz=dL \quad (*)$$

Θεώρημα:

① Έστω $\vec{F}=(M,N,P)$ ένα διανυσματικό πεδίο με συνεχείς συναρτήσεις σε ένα ανοιχτό χωρίο D. Υπάρχει μια διαφορίσιμη συνάρτηση L τέτοια ώστε $\vec{F}=\vec{\nabla}L=\left(\frac{\partial L}{\partial x},\frac{\partial L}{\partial y},\frac{\partial L}{\partial z}\right)$ αν για όλα τα σημεία A,B του D το $\int_A^B \vec{F}d\vec{r}$ δεν εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολουθούμε για να μετακινηθούμε από το A στο B.

$\Longleftrightarrow$

② Αν είναι ανεξάρτητο της διαδρομής $\int_A^B \vec{F}d\vec{r}=L(B)-L(A)$.

Απόδειξη

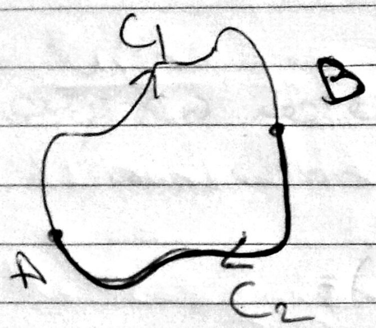
$$(*)\quad \int_A^B \vec{F}d\vec{r}=\int_A^B \vec{\nabla}L\,d\vec{r}=\int_A^B dL= L(B)-L(A)$$

Άμεση συνέπεια του θεωρήματος είναι:
Για μια κλειστή διαδρομή στο D $(A=B)$

$$\oint \vec{F}\cdot d\vec{r}=0 \Longleftrightarrow \vec{F} \text{ συντηρητικό}$$

Απόδειξη

$$\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{r} = 0$$



$$\Rightarrow \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{r} \Rightarrow \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r}$$

Επομένως: $\vec{F}$ συντηρητικό

(⇐) Έστω $\vec{F}$ συντηρητικό

$$\int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = L(B) - L(A)$$

Άρα $\oint \vec{F}\, d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} + \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r}$

$$= L(B) - L(A) + L(A) - L(B) = 0$$

Συνοπτικά:

$$\vec{F} = \vec{\nabla} L \Leftrightarrow \vec{F} \text{ συντηρητικό} \Leftrightarrow \boxed{\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0}$$

• Εύρεση της Συνάρτησης Δυναμικού

Είναι προφανές ότι αν γνωρίζουμε την $L = L(x,y,z)$, τότε $\vec{F} = \left(\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}, \frac{\partial L}{\partial z}\right) = \vec{\nabla} L$.

Το ζητούμενο είναι γνωρίζοντας την $\vec{F}$ να βρω την L και αν αυτό μπορώ να το κάνω για κάθε πεδίο $\vec{F}$.

Θεώρημα:
Για κάθε διανυσματικό πεδίο $\vec{F}=(M,N,P)$ υπάρχει συνάρτηση $L=L(x,y,z)$: $\vec{F}=\vec{\nabla}L$ αν η παράσταση $Mdx+Ndy+Pdz=dL$ είναι τέλειο διαφορικό, δηλαδή αν $Mdx+Ndy+Pdz=\frac{\partial L}{\partial x}dx+\frac{\partial L}{\partial y}dy+\frac{\partial L}{\partial z}dz=d\vec{L}$

Δηλαδή: $M=\frac{\partial L}{\partial x}$, $N=\frac{\partial L}{\partial y}$, $P=\frac{\partial L}{\partial z}$ ή

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dP}{dy}=\frac{dN}{dz}, \quad \frac{dM}{dz}=\frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dx}=\frac{dM}{dy}$$

Απόδειξη

M, N συνεχείς συναρτήσεις άρα $\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial y}$ συνεχείς

δηλαδή $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right)=\frac{dN}{dx}, \text{ αφού}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=\frac{dM}{dy}, \text{ αφού και οι υπόλοιπες.}$$

Παρατήρηση:
Για να βρούμε τη συνάρτηση δυναμικού (αν αυτή υπάρχει) πρέπει στην ουσία να λύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις $\frac{dL}{dx}=M$, $\frac{dL}{dy}=N$, $\frac{dL}{dz}=P$
Το δυναμικό που προκύπτει έχει πάντα τις απροσδιοριστίες μιας σταθεράς.

Παράδειγμα ②

Αν $\vec{F} = (e^x \cos y + yz,\ xz + e^x \sin y,\ xy + z)$

Ν.δ. αν υπάρχει η L: $\vec{F} = \vec{\nabla} L$

Λύση

α) Ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες

$M = e^x \cos y + yz$, $N = xz + e^x \sin y$, $P = xy + z$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ M & N & P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ e^x\cos y + yz & xz + e^x \sin y & xy + z \end{vmatrix} = 0$$

άρα $\exists \vec{L}$

(β) Λύνω τη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dL}{dx} = M = e^x \cos y + yz \Rightarrow L = e^x \cos y + yzx + g(y,z)$$

$$\frac{dL}{dy} = N \Rightarrow -e^x \sin y + zx + \frac{dg}{dy} = xz - e^x \sin y \Rightarrow g = g(z)$$

$$\frac{dL}{dz} = P \Rightarrow yx + g' = xy + z \Rightarrow g' = z \Rightarrow g = \frac{z^2}{2} + c$$

Τελικά: $L = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + c$

Παρατήρηση

Ακόμα και όταν δεν ικανοποιείται το βήμα α, δηλαδή δεν ελέγχω αν οι τρεις σχέσεις ισχύουν, η ανύπαρξη εύρεσης του δυναμικού θα προκύψει από τη Δ.Ε.

-35-

Παράδειγμα 3

Να εξετάσει αν το πεδίο $\vec{F} = (2x-3, -2, \cos z)$ είναι συντηρητικό.

Λύση

$M = 2x-3, \quad N = -2, \quad P = \cos z$

$\frac{dP}{dy} = 0 \qquad \frac{dM}{dz} = 0 \qquad \frac{dN}{dx} = 0$

$\frac{dN}{dz} = -1 \qquad \frac{dP}{dx} = 0 \qquad \frac{dM}{dy} = 0$

επομένως σύμφωνα το πεδίο $\vec{F}$ δεν είναι συντηρητικό

$\frac{dL}{dx} = M = 2x-3 \Rightarrow L = x^2 - 3x + g(y,z)$

$\frac{dL}{dy} = N \Rightarrow \frac{dg}{dy} = -2 \Rightarrow g = -2y + h(z)$

$\frac{dL}{dz} = P \Rightarrow -y + h' = \cos z \Rightarrow -y = \cos z - h'(z)$

$\nexists h(z)$ καθώς το L.